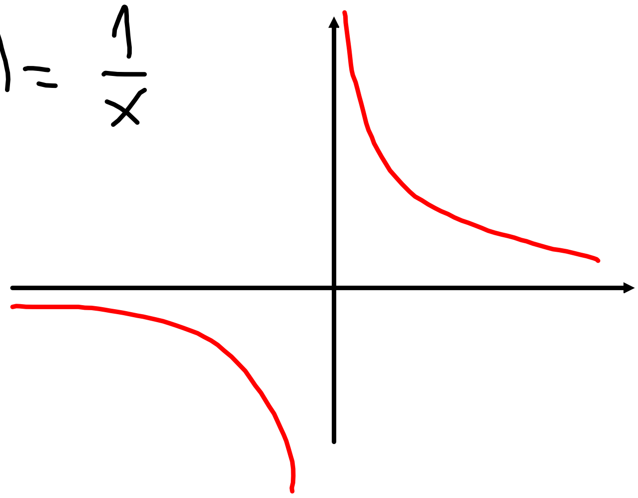
Oss: Se f è strettamente monotòna allora f è iniettiva.

Il viceversa è vero?

Se f è iniettiva

$\Rightarrow$ f è monotòna? NO

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$



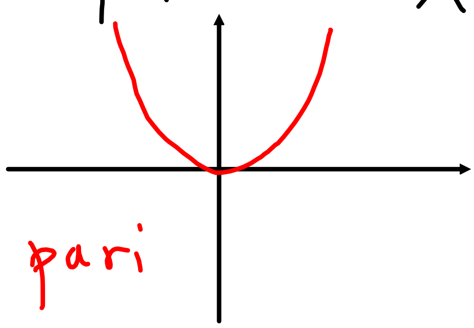
è iniettiva
ma non
monotòna

Funzioni elementari

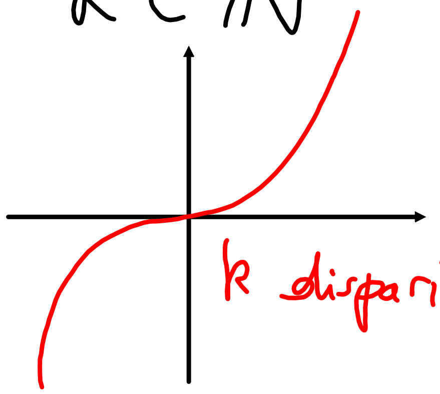
$$f(x) = ax + b \quad , a, b \in \mathbb{R}$$

retta.

$$f(x) = x^k \qquad k \in \mathbb{N}$$

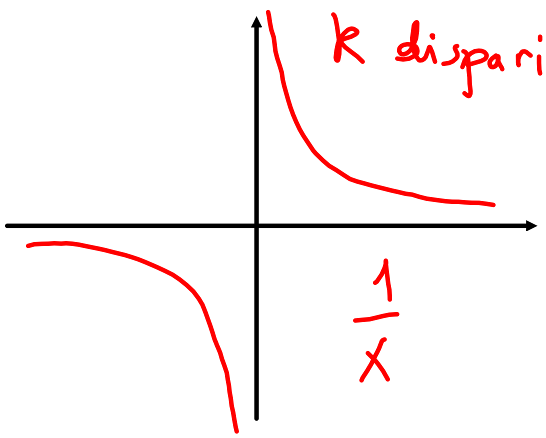


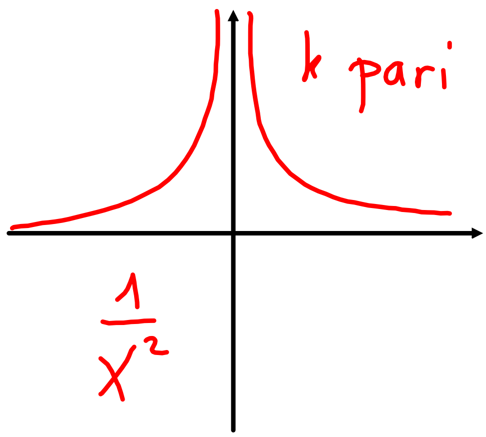
k pari



k dispari

$$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{Z}, \; k < 0$$





$$f(x) = x^{p/q} \quad p,q \in \mathbb{N}$$
$$q \neq 0$$

p, q non entrambi pari.

Dominio di f?

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

Se q è dispari

dominio $= \mathbb{R}$

Se q è pari

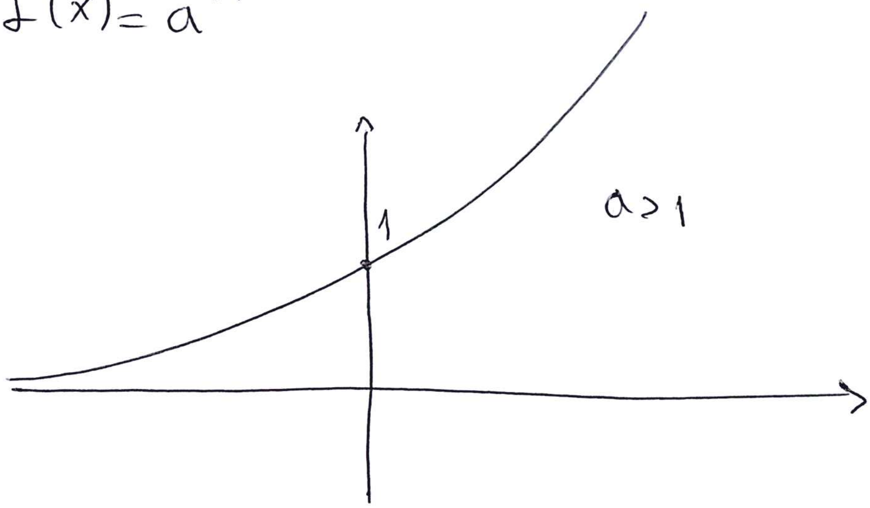
dominio $= [0, +\infty)$

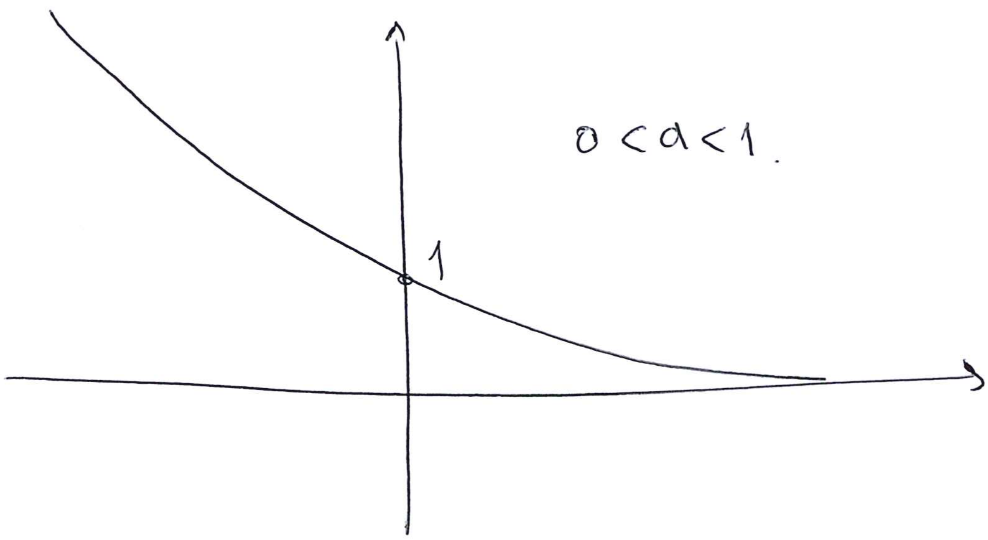
$$\sqrt{0} = 0$$

Funzione esponenziale

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$f(x) = a^x$





strettamente crescente se $a > 1$
strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

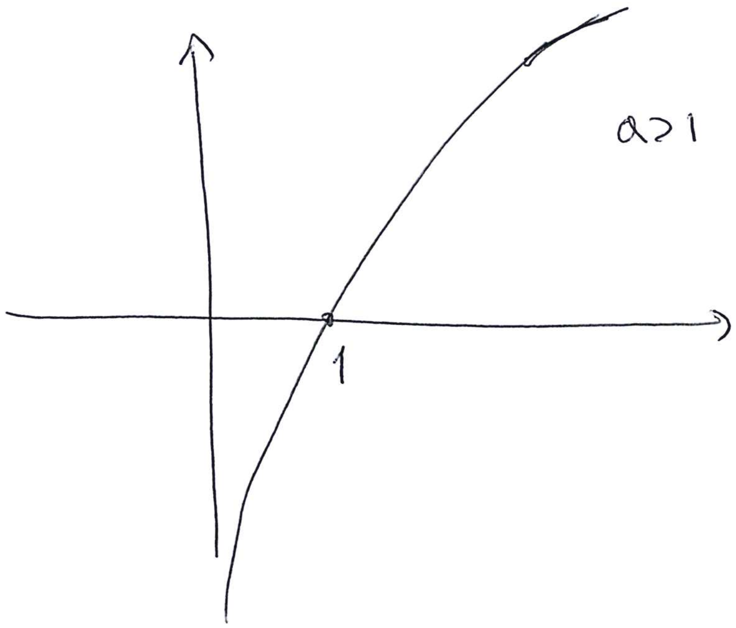
$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

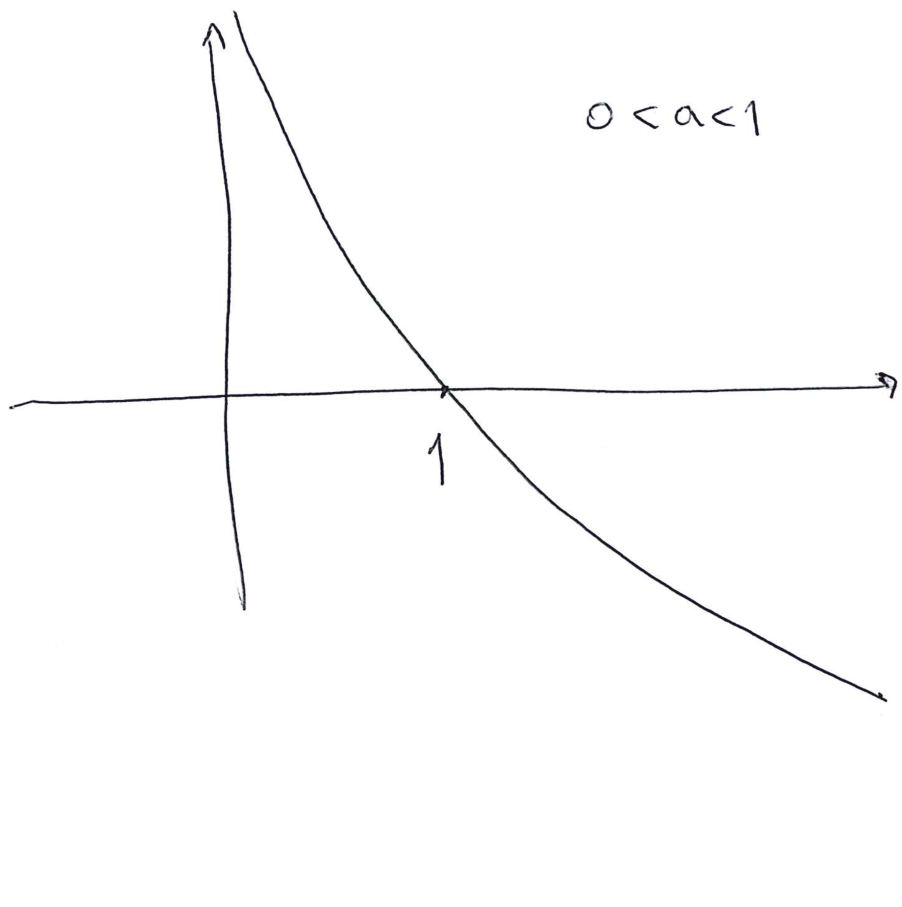
$f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

è invertibile.

la funzione inversa si chiama logaritmo in base a

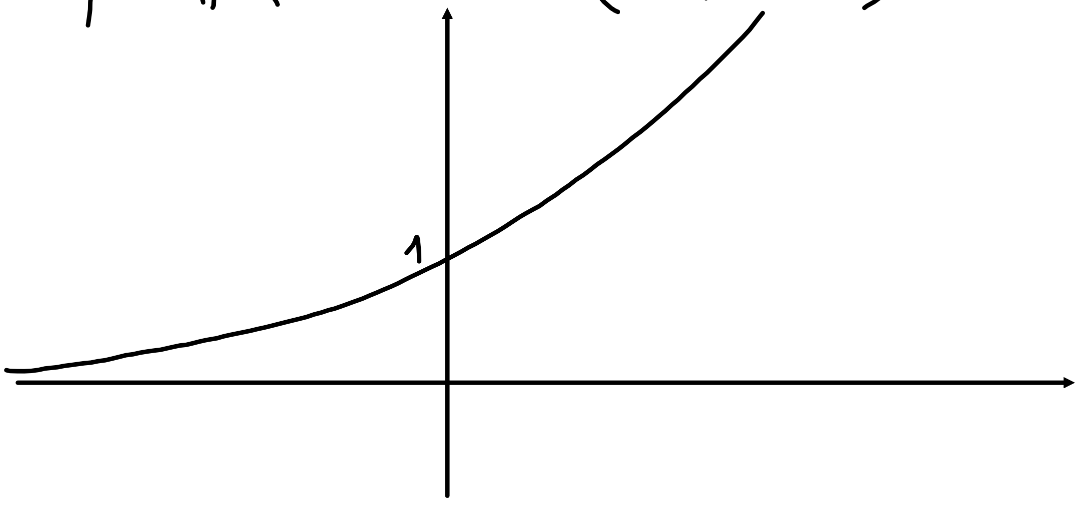
$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$





$f(x) = e^x$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$



e^x è invertibile

la sua inversa è il logaritmo (naturale)

$$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cambio di base

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

faccio il logaritmo naturale

$$y \log a = \log x$$

$$\log_a x \cdot \log a = \log x$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q}.$$

$$x^{\pi}, \; x^{\sqrt{2}}, \dots$$

Def: $\quad x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$

$$e^{\alpha \log x} = \left(e^{\log x}\right)^{\alpha}$$
$$= x^{\alpha}$$

Dominio di x^α

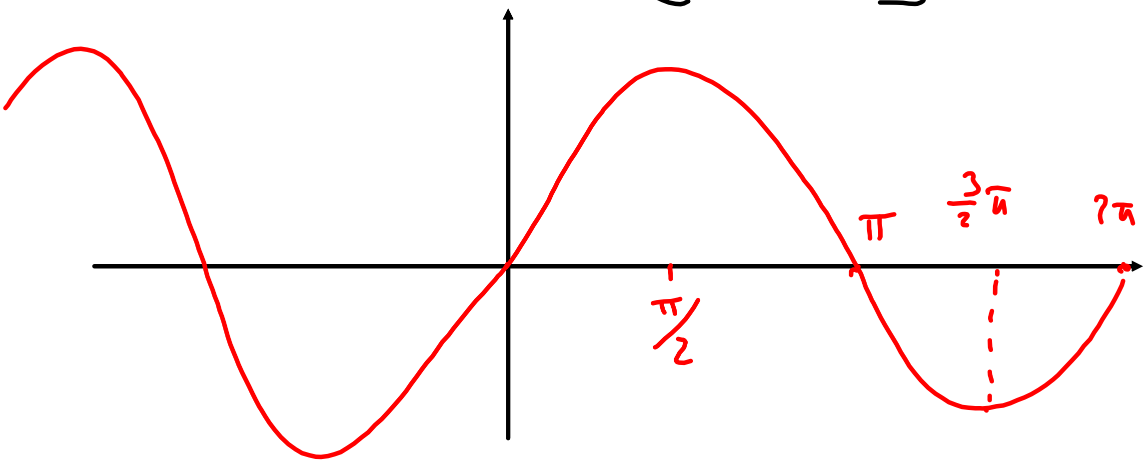
se $\alpha \notin \mathbb{Q}$

dominio $= (0, +\infty)$

per via del logaritmo

$$f(x) = \sin x$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$



è periodica di periodo 2π cioè

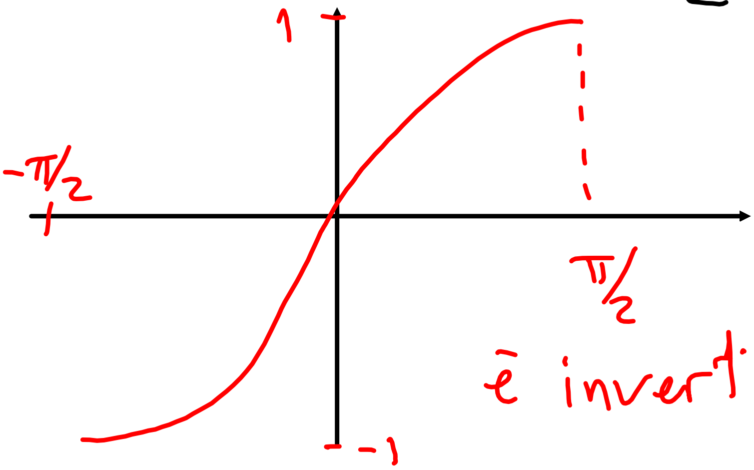
$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)$$

è invertibile ?

$$f(x) = \sin x$$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

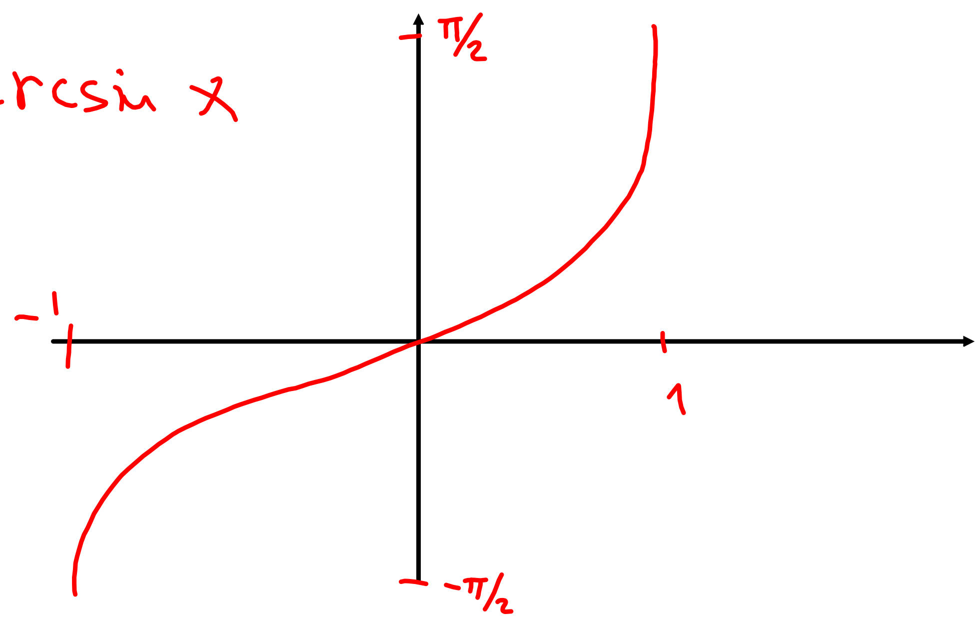


è invertibile

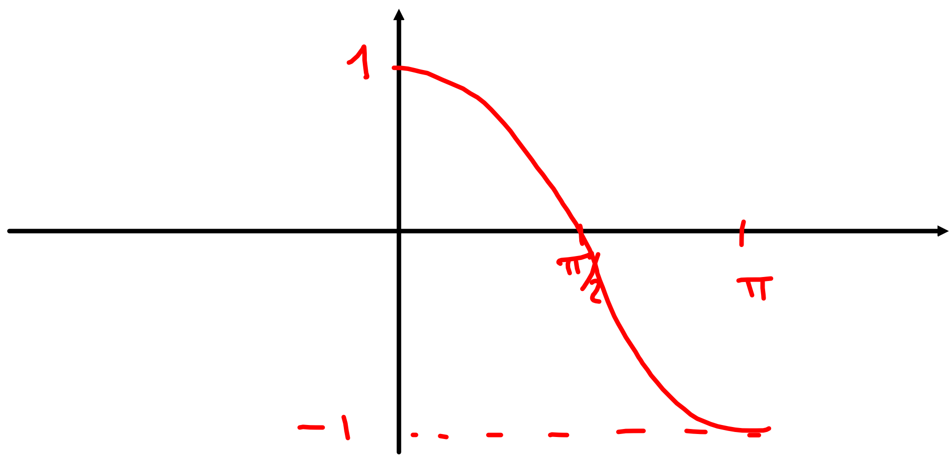
$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

La funzione arcoseno è l'inversa della funzione seno definita da $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a valori in $[-1, 1]$

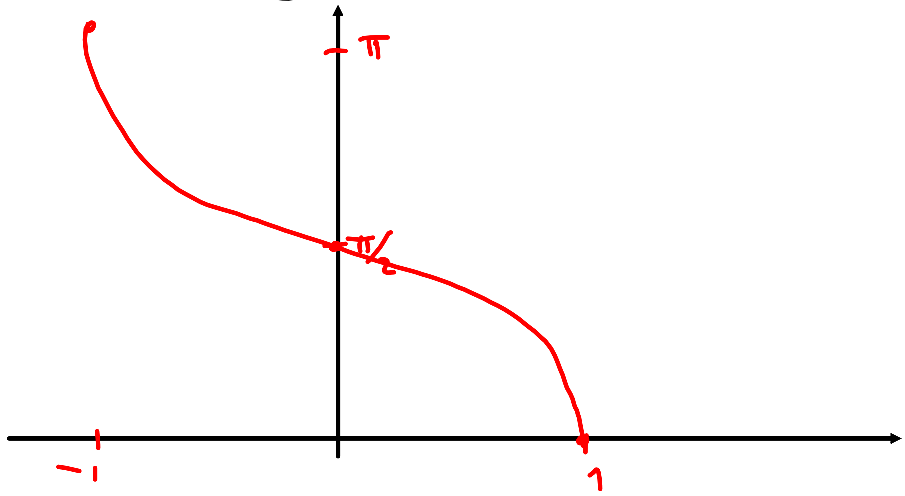
arcsin x



$$\cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$



$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$



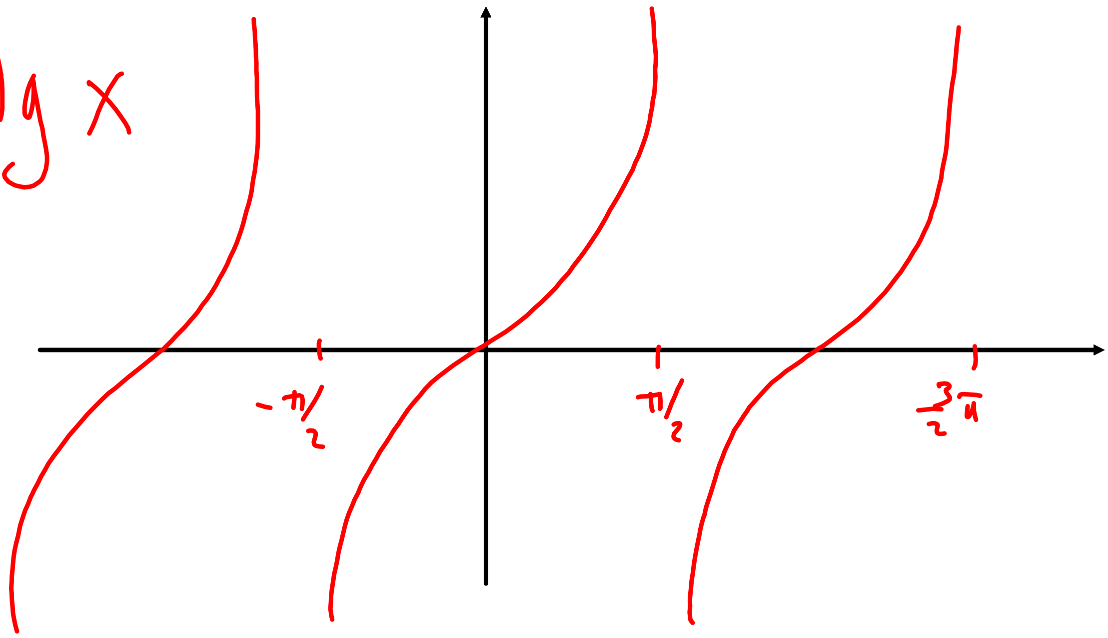
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

non è definita se

$\cos x = 0$

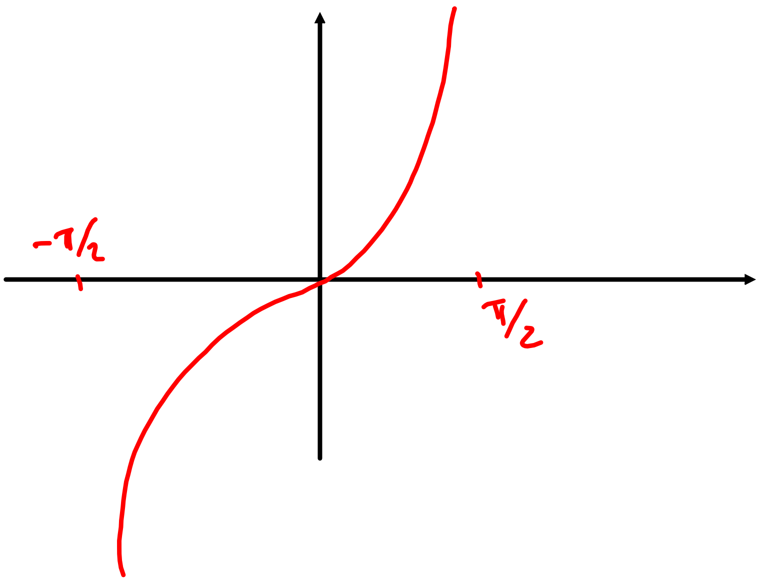
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

tg x

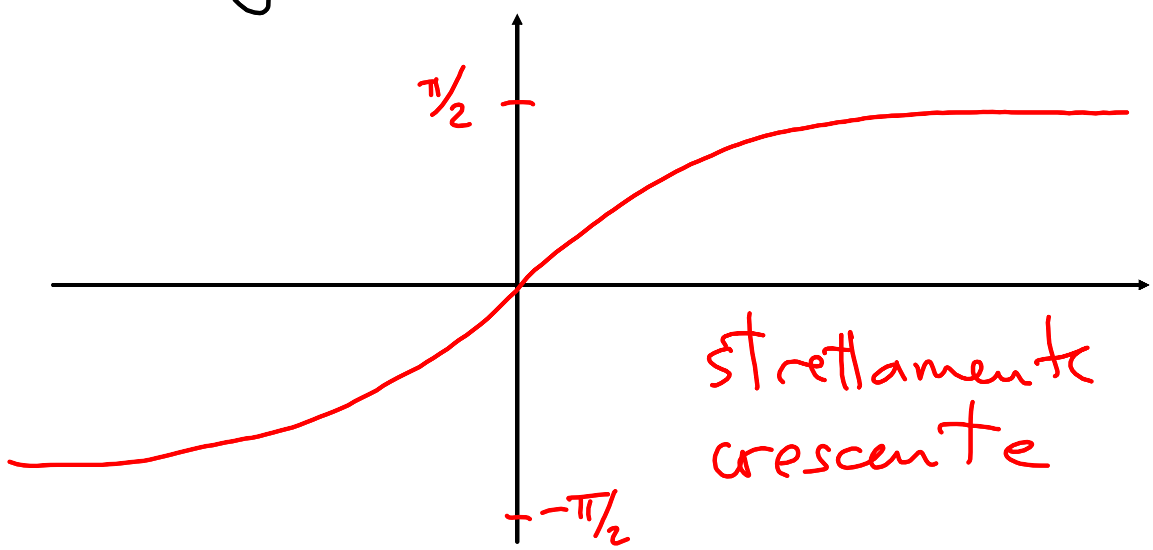


$$f : \left(-\pi/2, \pi/2\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è invertibile



$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



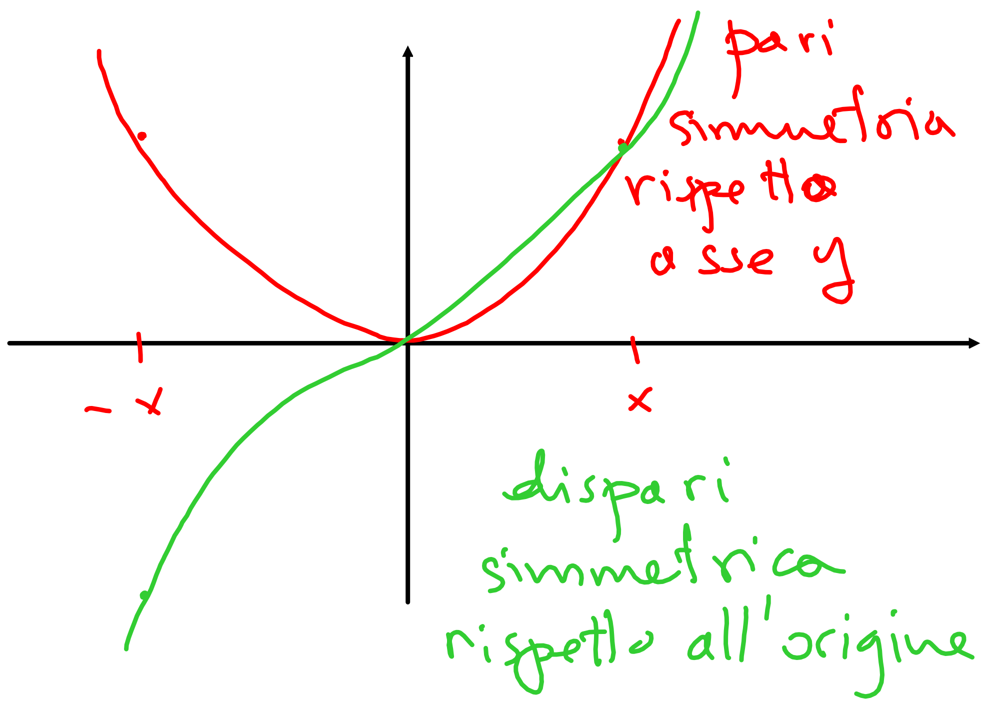
<u>Def</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f si dice pari se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si dice dispari

se $f(-x) = -f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$


pari
simmetria
rispetto
asse y
-x
x
dispari
simmetrica
rispetto all'origine

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$$

f è pari

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -1 \cdot x^3$$

$$= -x^3 = -f(x)$$

f è dispari

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

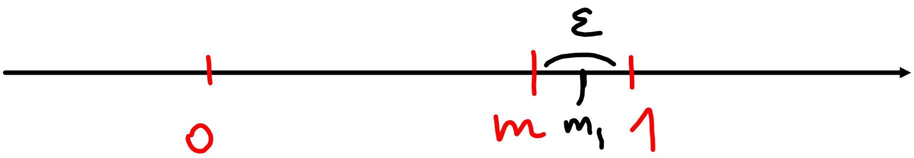
$m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a \ \forall a \in A$ e $m \in A$.

Es: $A = [0,1]$

$\max(A) = 1$

$B = [0,1)$

B non ha massimo perché



se m fosse il massimo di B

$\Rightarrow m \in B \Rightarrow m < 1$

poniamo $\varepsilon = 1 - m > 0$

sia $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2} > m$

$m_1 \in B \Rightarrow m$ non è il massimo di B.

$\Rightarrow B$ non ha max.

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a \ \forall a \in A$.

Con $\mathcal{M}_A = \{\text{maggioranti di } A\}$

Es: $A = [0,1]$

$2 \in \mathcal{M}_A$ è un maggiorante

$1 \in \mathcal{M}_A$, $\frac{1}{2} \notin \mathcal{M}_A$

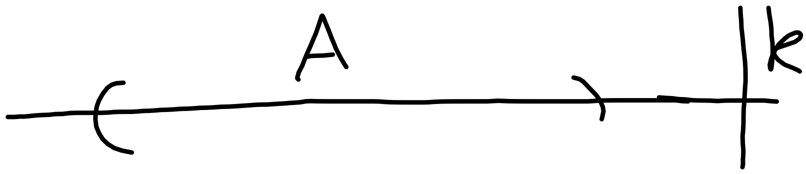
Oss: Se esiste un maggior. ne esistono infiniti.

Infatti se $m \in \mathcal{M}_A$

allora ogni $k \geq m$
è ancora un maggiorante.

<u>Es</u>: $A = \mathbb{R}$ non ha
maggioranti
$A = [3, +\infty)$ non ha
maggioranti

Def: Se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ l'insieme A si dice limitato superiormente.

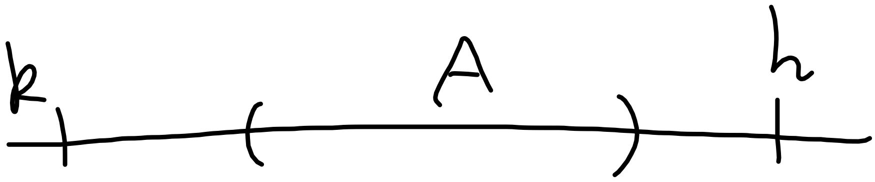


Definizioni analoghe per minoranti e minimo di un insieme e insiemi inferiormente limitati.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
se A è sia superiormente che inferiormente limitato $\Rightarrow$ A si dice limitato.

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, k, h \in \mathbb{R}$ t.c.

$$k \leq a \leq h \quad \forall a \in A.$$



__Teorema__: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

A superiormente limitato.

Allora esiste il minimo

di $\mathcal{M}_A$.

Def: Il minimo dei maggioranti di A si dice estremo superiore di A e si scrive

$$\sup(A).$$

Se A è superiormente limitato $\Rightarrow$ ha un estremo superiore.

Es: $A = [0, 1)$

$\mathcal{M}_A = [1, +\infty)$

$\sup(A) = 1.$

$$B = [0,1]$$

$$\mathcal{M}_B = [1, +\infty)$$

$$\sup(B) = 1$$

Oss: Se $\exists \max(A)$

$\Rightarrow \max(A) = \sup(A)$.